Geometrische Betrachtungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme.

Von TIBOR RADÓ in Szeged.

Die vorliegende Arbeit ist im Anschluss an Untersuchungen entstanden, die Herr A. HAAR über die direkte Lösung des PLATEAUschen Problems angestellt hat. Herr HAAR betrachtete dabei von vornherein Funktionen, die nur einer LIPSCHITZbedingung genügen, und wurde dadurch auf gewisse Sätze geführt, die für speziellere Funktionenklassen bekannt oder unmittelbar beweisbar sind, welche aber unter den zu Grunde gelegten allgemeinen Voraussetzungen eine sorgfältige Behandlung erfordern. Ich werde im folgenden, auf Anregung von Herrn HAAR, einige hieher gehörige Fragen beantworten.

§ 1.

Ein geometrischer Hilfssatz.

1. In der xy-Ebene sei eine *konvexe* Kurve C gegeben, von welcher wir noch voraussetzen, dass sie keine geradlinigen Bestandteile enthält, dass sie also mit keiner Geraden mehr als zwei getrennte Punkte gemein hat. Auf C sei eine stetige Wertefolge vorgegeben; mit T werde die Raumkurve bezeichnet, welche dadurch entsteht, dass man in jedem Punkte von C den zugehörigen Randwert als z-Koordinate aufträgt.

Wir sagen dann, dass die Randwertfolge auf C bzw. die dadurch erklärte Raumkurve Γ einer *Dreipunktebedingung* mit der Konstanten Δ genügen, wenn folgendes statthat. Für alle Ebenen

$$z = ax + by + c,$$

die mit der Raumkurve Γ wenigstens drei getrennte Punkte gemein haben, gilt die Ungleichung[1])

$$(a^2+b^2)^{1/2} \leqq \Delta.$$

In den bisherigen Untersuchungen über das PLATEAUsche Problem (LEBESGUE, S. BERNSTEIN, Ch. H. MÜNTZ)[2]) wird stets die Annahme zu Grunde gelegt, dass für die gegebenen Randwerte die Dreipunktebedingung erfüllt ist. Diese Bedingung tritt übrigens bereits in einer Note auf, in welcher HILBERT seine direkte Methode zur Lösung des DIRICHLETschen Problems skizziert.[3])

2. Sei $f(x, y)$ eine in und auf C stetige Funktion. Sie heisst, nach LEBESGUE, *monoton*, falls folgende Bedingung erfüllt ist. Ist G irgend ein Gebiet innerhalb der Randkurve C, und ist in allen Randpunkten von G

$$m \leqq f \leqq M,$$

so gilt dieselbe Ungleichung auch im Innern von G. Wenn nun $f(x, y)$ selbst, sowie auch alle Funktionen, die aus $f(x, y)$ durch Subtraktion einer linearen Funktion entstehen, also die Form

$$f(x, y) - ax - by - c$$

haben, monoton sind, so heisse die Funktion $f(x, y)$ eine *Sattelfunktion*, und die Fläche $z = f(x, y)$ eine *Sattelfläche*.

Zur Erläuterung dieser Bezeichnung werde bemerkt, dass unter der Annahme, dass $f(x, y)$ zweimal stetig differenzierbar ist,

---

1) Geometrisch bedeutet diese Bedingung folgendes. Ist θ derjenige feste Winkel zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$, für welchen

$$\operatorname{tg} \theta = \Delta$$

ist, und ist α der zwischen denselben Grenzen gelegene Winkel, welchen eine Ebene $z = ax + by + c$ mit der xy-Ebene einschliesst, so gilt $\alpha \leqq \theta$, sobald die betreffende Ebene wenigstens drei getrennte Punkte mit der Raumkurve Γ gemein hat.

2) LEBESGUE, Intégrale, longueur, aire (*Annali di Matematica*, serie III, t. VII, 1902, pp. 231—359, vgl. insbesondere pp. 342—359). S. BERNSTEIN, insb. in seinen Arbeiten: Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale (*Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, t. 27, 1910, pp. 233—256) und Sur les équations du calcul des variations (ebendort, t. 29, 1912, pp. 431—485). Ch. H. MÜNTZ, Die Lösung des PLATEAUschen Problems über konvexen Bereichen (*Mathematische Annalen*, Bd. 94, 1925, S. 53—96).

3) HILBERT, Über das DIRICHLETsche Prinzip (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Bd. 8, 1900, S. 184—188).

die Fläche $z = f(x, y)$ dann und nur dann eine Sattelfläche im Sinne der soeben gegebenen Erklärung ist, wenn ihre GAUSSsche Krümmung nirgends positiv wird. Man sieht dann auch sofort, dass die hinreichend oft derivierbaren Extremalflächen von zweidimensionalen regulären Variationsproblemen der Form

$$\iint \Phi(p, q)\, dx\, dy = \text{minimum}$$

ebenfalls Sattelflächen sind. Denn sie genügen partiellen Differentialgleichungen, nämlich der LAGRANGEschen Gleichung des betreffenden Problems, wobei diese Gleichungen die Form

$$\Phi_{pp}\, r + 2\Phi_{pq}\, s + \Phi_{qq}\, t = 0$$

haben, mit $\Phi_{pp} \Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 > 0$. Durch einfache algebraische Umformung folgert man daraus, dass $rt - s^2 \leq 0$ ist, dass also die GAUSSsche Krümmung der Extremalfläche nirgends positiv wird.

3. Über die Sattelfunktionen gilt nun der folgende Satz, der in speziellerer Fassung bei HILBERT, LEBESGUE, S. BERNSTEIN und Ch. H. MÜNTZ eine wichtige Rolle spielt.[4]

Hilfssatz über Sattelfunktionen. *Die Funktion $f(x, y)$ sei in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Falls dann ihre Randwerte einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen, so gilt für irgend zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) innerhalb C die Ungleichung*

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leq \Delta.$$

Das Wesentliche an diesem Satze tritt besser hervor, wenn wir denselben etwas anders formulieren. Zunächst bemerken wir, dass nach diesem Satze die Funktion $f(x, y)$ einer LIPSCHITZbedingung genügt. Es gibt dann eine *kleinste* positive Zahl $L[f]$, die wir als die LIPSCHITZ*konstante* von $f(x, y)$ bezeichnen werden, so dass für irgend zwei Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2) innerhalb C die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leq L[f]$$

erfüllt ist. Der Hilfssatz über Sattelfunktionen kann dann wie folgt formuliert werden:

---

[4]) Vgl. l. c. [2]) und [3]).

Die Funktion $f(x, y)$ sei in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Falls dann ihre Randwerte einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen, so kann man erstens behaupten, dass $f(x, y)$ einer LIPSCHITZ*bedingung genügt, und zweitens, dass ihre* LIPSCHITZ*konstante nicht grösser ist als Δ, d. h. nicht grösser als eine Zahl, die nur von den Randwerten abhängt, also ohne Kenntnis des Gesamtverlaufes von $f(x, y)$ angegeben werden kann, sobald die Randwerte bekannt sind.*

Für die besonderen Fälle, wo die Fläche $z = f(x, y)$ eine Polyederfläche ist, oder aber hinreichend regulär und im Allgemeinen negativ gekrümmt ist, wurde dieser Hilfssatz durch LEBESGUE bzw. S. BERNSTEIN[5]) in einfacher Weise bewiesen und bei wichtigen Untersuchungen verwendet. Bei ihren einfachen Beweisen sind aber gerade die jeweiligen besonderen Verhältnisse ausschlaggebend; so bei LEBESGUE der Umstand, dass die betrachteten Polyederflächen keine konvexe Ecken besitzen. Die Flächen, für welche Herr HAAR den Hilfssatz benötigte und formulierte, weisen ebenfalls eine Besonderheit auf, sie genügen nämlich einer LIPSCHITZbedingung. Ich habe den Beweis ursprünglich für diesen Fall, der einige Erleichterungen gewährt, durchgeführt; im folgenden teile ich einen etwas längeren Beweis mit, bei welchem gar keine zusätzliche Annahme gemacht wird, wodurch die einfachen topologischen Gründe des Satzes klar hervortreten.

4. Es sei also $f(x, y)$ in und auf C stetig und sie sei eine Sattelfunktion. Sei $z = ax + by + c$ die Gleichung einer Ebene und es werde

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

gesetzt. Bei allen Werten von a, b, c ist dann $\delta(x, y)$ monoton. Ist also C' eine einfache geschlossene Kurve im Innern von C, und ist auf C' beständig $\delta(x, y) \leqq 0$, so gilt $\delta(x, y) \leqq 0$ auch im Innern von C'. Wir wollen diese Aussage für einen besonderen Fall verschärfen.

Es möge die Kurve C' aus zwei Teilbögen σ und γ bestehen, wobei σ eine *geradlinige Strecke* ist. Auf σ sei $\delta(x, y) \leqq 0$, auf γ aber, einschliesslich der beiden Endpunkte, $\delta(x, y) < 0$. Wir wollen zeigen: *ist (x_0, y_0) ein innerer Punkt von C', der mit den beiden*

---

[5]) Vgl. l. c. [2]).

Endpunkten der Strecke σ nicht in einer Geraden liegt, so ist

$$\delta(x_0, y_0) < 0.$$

Es seien nämlich (x_1, y_1), (x_2, y_2) die beiden Endpunkte der Strecke σ. Mit t bezeichnen wir einen reellen Parameter, und setzen

$$z_t(x, y) = t\,[(y_2 - y_1)\,x + (x_1 - x_2)\,y - x_1 y_2 + x_2 y_1]. \qquad \text{I.}$$

Dann bilden wir

$$\delta_t(x, y) = \delta(x, y) - z_t(x, y). \qquad \text{II.}$$

Diese Funktion $\delta_t(x, y)$ ist, bei jedem festen Werte von t, in der Form

$$f(x, y) - Ax - By - C$$

darstellbar, wo A, B, C Konstanten sind; folglich ist $\delta_t(x, y)$ monoton.

Am Bogen γ ist, einschliesslich Endpunkte, nach Voraussetzung $\delta(x, y) < 0$; wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ gibt es also eine positive Konstante ε, so dass am Bogen γ

$$\delta(x, y) \leqq -\varepsilon \qquad \text{III.}$$

gilt. Am Bogen γ ist nun, wie aus I. ersichtlich,

$$|z_t(x, y)| < \alpha\,|t|, \qquad \text{IV.}$$

wo α eine endliche, durch die Figur bestimmte Konstante ist. Sei nun t durch die Forderung

$$|t| < \frac{\varepsilon}{2\alpha} \qquad \text{V.}$$

eingeschränkt. Dann ist am Bogen γ, nach II—V,

$$\delta_t(x, y) < -\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < 0.$$

Auf der Strecke σ ist, nach I, $z_t(x, y) = 0$, also $\delta_t(x, y) = \delta(x, y)$. Da hier nach Voraussetzung $\delta(x, y) \leqq 0$ ist, so ist hiernach auf σ auch $\delta_t(x, y) \leqq 0$. Auf der ganzen Kurve C' ist also $\delta_t(x, y) \leqq 0$, folglich gilt, wegen der Monotonität, im inneren Punkte (x_0, y_0) die Ungleichung

$$\delta_t(x_0, y_0) = \delta(x_0, y_0) - t\,[(y_2 - y_1)\,x_0 + (x_1 - x_2)\,y_0 - x_1 y_2 + x_2 y_1] \leqq 0,$$

also

$$\delta(x_0, y_0) \leqq t\,[(y_2 - y_1)\,x_0 + (x_1 - x_2)\,y_0 - x_1 y_2 + x_2 y_1], \qquad \text{VI.}$$

sofern V. erfüllt ist. Der Koeffizient von t in VI. ist von Null verschieden, da nach Voraussetzung die drei Punkte (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) nicht in einer Geraden liegen; es sei dieser Koeffizient etwa negativ. Wird dann $t > 0$ der Forderung V. entsprechend gewählt, so ergibt sich aus VI:

$$\delta(x_0, y_0) < 0,$$

was gezeigt werden sollte.

5. Sei wieder

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c.$$

Diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, in welchen $\delta(x, y) \neq 0$, bilden eine offene Punktmenge; eine solche zerfällt bekanntlich in höchstens abzählbar viele getrennte Gebiete. Ist G ein derartiges Gebiet, so soll dasselbe ein *vollständiges nullstellenfreies Gebiet* für $\delta(x, y)$ heissen. In G ist dann $\delta(x, y) \neq 0$; in G hat also $\delta(x, y)$ überall dasselbe Vorzeichen. Ist P ein Randpunkt von G, der im Innern der Randkurve C liegt, so ist P eine Nullstelle von $\delta(x, y)$.

Da nun innerhalb G die Funktion $\delta(x, y)$ nirgends gleich Null ist, so muss es auch solche Randpunkte von G geben, in welchen $\delta(x, y) \neq 0$ ist; sonst müsste die monotone Funktion $\delta(x, y)$ in G identisch verschwinden. Sei R ein solcher Randpunkt von G, in welchem $\delta(x, y)$ von Null verschieden ist. Nach einer obigen Bemerkung liegt R auf der Randkurve C. Einen derartigen Randpunkt von G, der also auf C liegt und in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ ist, wollen wir als einen *charakteristischen Randpunkt* von G bezeichnen.

Sei R ein solcher Randpunkt von G. Wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ kann man dann ein halbkreisförmiges Gebiet angeben, welches längs eines kleinen, den Punkt R enthaltenden Bogens an die Randkurve C stösst und in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ ist. Dieses halbkreisförmige Gebiet ist dann in G enthalten, da G ein vollständiges nullstellenfreies Gebiet ist. Daraus folgt: Sind G_1, G_2 getrennte vollständige nullstellenfreie Gebiete für $\delta(x, y)$, und sind R_1, R_2 charakteristische Randpunkte dieser Gebiete, so sind diese Punkte verschieden.

Sei γ einer der beiden Bögen, in welche C durch die Punkte R_1, R_2 zerlegt wird. Wir wollen zeigen: *es gibt auf γ wenigstens eine Nullstelle von $\delta(x, y)$.* Denn sei dies nicht der Fall. Dann wäre am Bogen γ, einschliesslich Endpunkte, $\delta(x, y) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $\delta(x, y)$ könnten wir dann einen den Bogen γ enthaltenden, etwas grösseren Bogen γ^* auf C angeben, und ein schmales, längs γ^* an C anstossendes kreiszweieckförmiges Gebiet G^* bestimmen, in welchem $\delta(x, y) \neq 0$ wäre. Dieses Gebiet G^* wäre dann sowohl in G_1 wie auch in G_2 enthalten, da G_1 und G_2 vollständige nullstellenfreie Gebiete sind. Dann aber müssten G_1 und G_2 zusammenfallen. Aus diesem Widerspruche geht die Richtigkeit unserer Behauptung hervor, dass am Bogen γ wenigstens eine Nullstelle von $\delta(x, y)$ liegt. Da die Endpunkte von γ, als charakteristische Randpunkte, keine Nullstellen sind, so ist diese Nullstelle von den Endpunkten des Bogens γ gewiss verschieden.

6. Bisher haben wir von der Voraussetzung, dass die Randwerte von $f(x, y)$ einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen, keinen Gebrauch gemacht; jetzt werden wir auch diese Voraussetzung berücksichtigen. Dieselbe soll in der folgenden aequivalenten Fassung zu Grunde gelegt werden. *Ist* $z = ax + by + c$ *die Gleichung einer Ebene und ist*

$$(a^2 + b^2)^{1/2} > \Delta,$$

so hat die Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

höchstens zwei verschiedene Nullstellen auf der Randkurve C.

Wir wollen jetzt zeigen: wenn $(a^2 + b^2)^{1/2} > \Delta$ ist, so kann es keine zwei getrennte vollständige nullstellenfreie Gebiete der Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

geben, in welchen diese Funktion *dasselbe Vorzeichen* hat. Mit anderen Worten: alle diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, wo $\delta(x, y)$ etwa positiv ist, bilden ein *einziges* Gebiet, vorausgesetzt, dass $(a^2 + b^2)^{1/2} > \Delta$ ist.

Man setze nämlich voraus, dass zwei solche Gebiete G_1, G_2 vorhanden sind, in denen etwa $\delta(x, y) > 0$ ist. Seien R_1, R_2 charakteristische Randpunkte dieser Gebiete. Nach No 5 liegt dann auf jedem der beiden Bögen, in welche die Randkurve C durch die Punkte R_1, R_2 zerlegt wird, gewiss je eine Nullstelle von $\delta(x, y)$; seien Q_1, Q_2 diese Nullstellen. Dann gelten also die Beziehungen

$$\delta(R_1) > 0 \quad \delta(R_2) > 0, \quad \delta(Q_1) = 0, \quad \delta(Q_2) = 0.$$

Es werde nun $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, dass

$$\delta(R_1) > \varepsilon, \quad \delta(R_2) > \varepsilon$$

ist. Für die Funktion

$$\delta^*(x, y) = \delta(x, y) - \varepsilon$$

bestehen dann die Relationen

$$\delta^*(R_1) > 0, \ \delta^*(R_2) > 0, \ \delta^*(Q_1) < 0, \ \delta^*(Q_2) < 0,$$

aus welchen, da auf der Randkurve C die Punktepaare R_1, R_2 und Q_1, Q_2 einander trennen, sogleich folgt, dass die Funktion $\delta^*(x, y)$ wenigstens vier getrennte Nullstellen auf der Randkurve C besitzt. Da aber

$$\delta^*(x, y) = f(x, y) - ax - by - c - \varepsilon$$

und nach Voraussetzung $(a^2 + b^2)^{1/2} > \Delta$ ist, so widerspricht diese Folgerung der Voraussetzung, dass die Randwerte von $f(x, y)$ einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügen.

7. Es seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei verschiedene Punkte auf der Randkurve C. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leqq \Delta.$$

Denn sei (x_3, y_3) irgend ein dritter Punkt auf C. Wir können dann a, b, c so bestimmen, dass die Gleichungen

$$f(x_i, y_i) = ax_i + by_i + c \qquad \text{VII.}$$
$$(i = 1, 2, 3)$$

bestehen. Die entsprechende Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c$$

hat dann wenigstens drei Nullstellen auf der Randkurve C. Der Dreipunktebedingung zufolge ist also

$$(a^2 + b^2)^{1/2} \leqq \Delta. \qquad \text{VIII.}$$

Aus VII. folgt

$$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1),$$

und daraus, mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung,

$$[f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)]^2 \leqq (a^2 + b^2)[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2].$$

Mit Rücksicht auf VIII. ist also

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leqq \Delta,$$

wie wir zeigen wollten.

8. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen schreiten wir nun zum eigentlichen Beweise, den wir indirekt führen werden. Wir nehmen also an, dass im Innern der Randkurve C zwei

Punkte A, B vorhanden sind, so dass die Ungleichung

$$\frac{|f(B)-f(A)|}{\overline{AB}} > \varDelta \qquad \text{IX.}$$

gilt, und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruche führt.

Es seien A^*, B^* diejenigen, im xyz-Raume gedachten Punkte der Fläche $z=f(x,y)$, die über A bzw. B liegen. Für unsere Schlüsse wird die Annahme wesentlich sein, dass die Strecke A^*B^* nicht ganz auf der Fläche $z=f(x,y)$ liegt. Diese Annahme wollen wir also zunächst rechtfertigen, indem wir zeigen: wenn innerhalb C zwei Punkte A, B vorhanden sind, für welche IX. erfüllt ist, so kann man auch zwei solche Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ finden, für welche IX. ebenfalls besteht, die aber auch der weiteren Forderung genügen, dass die entsprechende Strecke $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ nicht ganz auf der Fläche $z=f(x,y)$ liegt.

Es seien A', B' die beiden Punkte, in welchen die Randkurve C von der Geraden AB getroffen wird; die Bezeichnung sei so gewählt, dass die Strecken $AB, A'B'$ gleichgerichtet sind. Sei, für $0 \leqq t \leqq 1$, A_t derjenige Punkt der Strecke AA', für welchen

$$\frac{\overline{AA_t}}{\overline{AA'}} = t$$

ist, und sei B_t derjenige Punkt der Strecke BB', für welchen

$$\frac{\overline{BB_t}}{\overline{BB'}} = t$$

ausfällt. Der Ausdruck

$$\varphi(t) = \frac{|f(B_t)-f(A_t)|}{\overline{A_tB_t}}$$

ist für $0 \leqq t \leqq 1$ eine stetige Funktion von t. Nach IX. ist $\varphi(0) > \varDelta$, nach No 7 ist $\varphi(1) \leqq \varDelta$, da für $t=1$ die Punkte A_t, B_t mit den auf C liegenden Punkten A' bzw. B' zusammenfallen. Wir können also t so fixieren, dass $\mathfrak{A}=A_t$, $\mathfrak{B}=B_t$ innere Punkte der Strecken AA' bzw. BB' sind und ausserdem die Ungleichungen

$$\varDelta < \frac{|f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})|}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} < \frac{|f(B)-f(A)|}{\overline{AB}} \qquad \text{X.}$$

gelten. Diese Punkte $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ genügen unseren Forderungen. Denn sind $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$ die über $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ liegenden Punkte der Fläche, so ist zunächst nach X:

$$\frac{f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} \neq \frac{f(B)-f(A)}{\overline{AB}},$$

die Strecke $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ liegt also nicht ganz auf der Fläche $z=f(x,y)$; ausserdem gilt nach X. wiederum die zu widerlegende Ungleichung

$$\frac{|f(\mathfrak{B})-f(\mathfrak{A})|}{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} > \varDelta.$$

Damit ist die im folgenden zu Grunde gelegte Annahme, dass die Strecke A^*B^* nicht ganz auf der Fläche liegt, gerechtfertigt.

9. Dies vorausgeschickt, sei γ^* derjenige Bogen auf der Fläche, der über der Strecke AB liegt. Dann kann dieser Bogen γ^* durch die Gleichung

$$z=f(P) \qquad \text{XI.}$$

dargestellt werden, wobei P einen auf der Strecke AB veränderlichen Punkt bedeutet. Sei ferner in analoger Weise

$$z=\zeta(P) \qquad \text{XII.}$$

die Gleichung derjenigen Strecke des xyz-Raumes, die durch die Endpunkte des Bogens γ^* bestimmt wird; dabei ist $\zeta(P)$ eben nur für die Punkte der Strecke AB erklärt. Es ist dann

$$\zeta(A)=f(A),\ \zeta(B)=f(B). \qquad \text{XIII.}$$

Da aber, wie wir nach No 8 annehmen dürfen, der Bogen γ^* mit der durch XII. dargestellten Strecke nicht zusammenfällt, so ist die, wieder nur auf der Strecke AB erklärte stetige Funktion

$$\psi(P)=f(P)-\zeta(P) \qquad \text{XIV.}$$

nicht identisch gleich Null. Um die Vorstellungen zu fixieren, nehmen wir an, dass $\psi(P)$ auf der Strecke AB ein positives Maximum

$$\mu>0 \qquad \text{XV.}$$

erreicht. Diejenigen Punkte P der Strecke AB, in welchen $\psi(P)$ ihr Maximum μ erreicht, bilden eine abgeschlossene Punktmenge, welche aber die Endpunkte A und B nicht enthält, da nach XIII—XV

$$\psi(A)=\psi(B)=0$$

ist. Es gibt also einen Punkt O, der unter allen Punkten, in welchen $\psi(P)=\mu$ ist, am nächsten zu A liegt. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Auf der ganzen Strecke AB ist $\psi(P)\leq\mu$.

b) In den Endpunkten A und B gilt $\psi(A)=\psi(B)=0$.

c) Auf der Strecke AO, einschliesslich A und ausschliesslich O, gilt $\psi(P) < \mu$.

d) Im Punkte O ist $\psi(O) = \mu$.

10. Wir erklären nun eine im xyz-Raume gelegene, über AB liegende Strecke durch die Gleichung

$$z = \zeta(P) + \mu. \tag{XVI.}$$

Unsere weiteren Betrachtungen beziehen sich auf die relative Lage der Fläche $z = f(x, y)$ zu denjenigen Ebenen, welche diese Strecke enthalten. Um die hier vorliegenden Verhältnisse arithmetisch verfolgen zu können, wollen wir die erwähnten Ebenen durch die Werte eines Parameters λ in geeigneter Weise festlegen. Sei

$$z = z_0(x, y) = a_0 x + b_0 y + c_0 \tag{XVII.}$$

die Gleichung einer *festen* Ebene durch die Strecke XVI. Dann ist also auf der Strecke AB:

$$z_0(P) = \zeta(P) + \mu. \tag{XVIII.}$$

Sei weiter, wenn (x_A, y_A), (x_B, y_B) die Koordinaten von A bzw. B sind,

$$T(x, y) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x & y & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} \tag{XIX.}$$

Dann ist $T(x, y)$, welche den Flächeninhalt des im Sinne $A, (x, y), B$ umlaufenen Dreieckes $A, (x, y), B$ darstellt, eine lineare Funktion; dieselbe ist bekanntlich in derjenigen, durch die Gerade AB bestimmten Halbebene, die in Bezug auf den Umlaufssinn $A \to B$ rechts liegt, positiv, in der anderen Halbebene negativ. Auf der Strecke AB ist $T(x, y)$ gleich Null.

Durch die Gleichung

$$z = z_\lambda(x, y) = z_0(x, y) + \lambda \cdot T(x, y), \tag{XX.}$$

wobei der Parameter λ alle endlichen Werte annehmen soll, wird dann bei jedem festen Werte von λ eine der betrachteten Ebenen dargestellt. Wir können der Gleichung XX. auch die Form

$$z = z_\lambda(x, y) = a_\lambda x + b_\lambda y + c_\lambda \tag{XX$_1$}$$

geben, wo a_λ, b_λ, c_λ vom Parameter λ abhängen; da für $\lambda = 0$ die Ebene $z = z_\lambda(x, y)$ mit der oben eingeführten festen Ebene $z = z_0(x, y)$ zusammenfällt, so steht diese Bezeichnungsweise mit XVII. im Einklang.

11. Aus der zu widerlegenden Voraussetzung IX. ziehen wir zunächst den Schluss, dass für die Koeffizienten der Formel XX_1 für alle Werte von λ die Ungleichung

$$(a_\lambda^2 + b_\lambda^2)^{1/2} > \varDelta \qquad \text{XXI.}$$

gilt. Es seien in der Tat (x_A, y_A), (x_B, y_B) die Koordinaten der Punkte A, B. Aus XIII, XVIII, XX_1 folgt dann

$$f(B) + \mu = a_\lambda x_B + b_\lambda y_B + c_\lambda, \; f(A) + \mu = a_\lambda x_A + b_\lambda y_A + c_\lambda,$$
$$f(B) - f(A) = a_\lambda (x_B - x_A) + b_\lambda (y_B - y_A).$$

Nach der SCHWARZschen Ungleichung ergibt sich daraus:

$$|f(B) - f(A)|^2 \leqq (a_\lambda^2 + b_\lambda^2)\, \overline{AB}^2,$$

woraus, mit Rücksicht auf IX, die behauptete Ungleichung XXI. folgt.

12. Wir setzen

$$\delta_\lambda(x, y) = f(x, y) - z_\lambda(x, y). \qquad \text{XXII.}$$

Nach XIV, XVIII—XX. gilt dann für jeden Punkt P der Strecke AB die Beziehung

$$\delta_\lambda(P) = \psi(P) - \mu.$$

Aus No 9 *a)—d)* ergeben sich demnach die folgenden, für alle λ-Werte gültigen Tatsachen.

a) Auf der Strecke AB ist $\delta_\lambda(x, y) \leqq 0$.

b) In den Endpunkten A und B ist $\delta_\lambda(x, y) < 0$.

c) Auf der Strecke AO, mit Einschluss von A und mit Ausschluss von O, ist $\delta_\lambda(x, y) < 0$.

d) Im Punkte O ist $\delta_\lambda(x, y) = 0$.

Aus No 6 folgt weiter, wegen der Ungleichung XXI, dass alle diejenigen Punkte im Innern der Randkurve C, in welchen $\delta_\lambda(x, y) < 0$ ist, ein *einziges* Gebiet bilden. Dieses Gebiet werde mit G_λ bezeichnet. Aus den soeben festgestellten Tatsachen *a)—d)* folgt dann, dass die beiden Punkte A und B *innere* Punkte von G_λ sind und dass der Punkt O *Randpunkt* von G_λ ist, und zwar derjenige Randpunkt auf der Strecke AB, der dem Endpunkte A am nächsten liegt.

Sei nun λ ein beliebiger Parameterwert. Da die beiden Punkte A und B innere Punkte von G_λ sind, so kann man A und B durch einen innerhalb G_λ verlaufenden einfachen Streckenzug Σ verbinden. Man durchlaufe diesen Streckenzug Σ in der Richtung von A nach B; sei B_0 der erste Punkt, in welchem dabei die

Strecke OB getroffen wird. Man durchlaufe jetzt, von diesem Punkte B_0 aus, den Streckenzug Σ in umgekehrter Richtung; sei A_0 der erste Punkt, in welchem dabei die Strecke OA getroffen wird.[6]) Die Punkte A_0, B_0 sind *innere* Punkte von G_λ, sind also vom Punkte O, welcher *Randpunkt* von G_λ ist, verschieden; aus der Konstruktion folgt, dass O zwischen A_0 und B_0 liegt. Sei Σ_* derjenige Teilbogen von Σ, der durch die beiden Punkte A_0, B_0 bestimmt wird. Der Streckenzug Σ_* verbindet dann innerhalb G_λ die Punkte A_0 und B_0, ohne die Strecke A_0B_0 sonst zu treffen.[7]) Die Strecke A_0B_0 und der Streckenzug Σ_* bilden also ein einfaches Polygon Π.

Je nachdem nun das durch Π begrenzte Gebiet, vom Punkte A aus betrachtet, von rechts oder von links an die Strecke AB stösst, wollen wir sagen, dass das Gebiet G_λ rechts bzw. links von der Strecke AB liegt. Den springenden Punkt unseres ganzen Gedankenganges bildet nun die Tatsache, dass *diese Aussage von der besonderen Wahl des Streckenzuges Σ,* von welchem aus wir zum Polygon Π gelangt sind, *unabhängig ist,* dass also diese Aussage tatsächlich etwas Charakteristisches über die gegenseitige Lage des Gebietes G_λ und der Strecke AB enthält.

Um dies zu zeigen, prüfen wir die entgegengesetzte Annahme. Dann gilt also folgendes. Es gibt einen innerhalb G_λ verlaufenden einfachen Streckenzug Σ'_*, der einen Punkt A'_0 der Strecke OA mit einem Punkte B'_0 der Strecke OB verbindet, wobei A'_0, B'_0 innere Punkte von G_λ sind; der Streckenzug Σ'_* bildet mit der Strecke $A'_0B'_0$ ein einfaches Polygon Π'; die durch Π bzw. Π' begrenzten Gebiete stossen von *verschiedenen* Seiten an die Strecke AB. Es werde dann mit A_* derjenige der beiden Punkte A_0, A'_0 bezeichnet, der am nächsten zum Punkte O liegt; ebenso werde mit B_* derjenige der beiden Punkte B_0, B'_0 bezeichnet, der am nächsten zum Punkte O liegt. Die auf diese Weise bestimmten Punkte A_*, B_* können dann sowohl innerhalb Π wie auch innerhalb Π' durch

---

[6]) Diese Punkte A_0 und B_0 können mit A bzw. B zusammenfallen; im Allgemeinen ist es aber nicht möglich, den Streckenzug Σ so zu wählen, dass derselbe mit der Strecke AB nur die beiden Endpunkte gemein hat.

[7]) Aus der Konstruktion folgt, dass der Streckenzug Σ_* auch mit der ganzen Strecke AB eben nur die Punkte A_0, B_0 gemein hat. Hingegen kann es sein, dass die *Gerade AB* vom Streckenzuge Σ_* noch in weiteren Punkten getroffen wird, die dann auf der Verlängerung der *Strecke AB* liegen.

je einen Kreisbogen $\varkappa$ bzw. $\varkappa'$ verbunden werden. Da nach Voraussetzung die durch Π bzw. Π' begrenzten Gebiete von verschiedenen Seiten an die Strecke AB stossen, so bestimmen $\varkappa$ und $\varkappa'$ ein Kreisbogenzweieck, welches den Punkt O *im Innern* enthält. Im Punkte O ist aber $\delta_\lambda(x, y) = 0$; wegen der Monotonität dieser Funktion folgt daraus sogleich, dass auch am Rande des Kreisbogenzweieckes wenigstens eine Nullstelle Q von $\delta(x, y)$ liegen muss. Dieser Punkt Q liegt entweder am Kreisbogen $\varkappa$ oder am Kreisbogen $\varkappa'$; es liege etwa der erste Fall vor. Da in den, innerhalb G_λ liegenden, Endpunkten von $\varkappa$ die Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ negativ ist, so liegt Q innerhalb des Polygons Π, liegt aber mit den Punkten A_0, B_0 nicht in einer Geraden. Dann kann aber im Punkte Q, wie aus No 4 sogleich folgt, die Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ nicht verschwinden. In der Tat gilt auf der Strecke A_0B_0, welche Teilstrecke von AB ist, wegen No 12 *a)* die Ungleichung $\delta_\lambda(x, y) \leq 0$; am Streckenzuge Σ_*, der einschliesslich Endpunkte in G_λ liegt, ist $\delta_\lambda(x, y) < 0$. Aus diesem Sachverhalte folgt aber nach No 4, dass in jedem innerhalb Π liegenden Punkte, der mit den Punkten A_0, B_0 nicht auf einer Geraden liegt, insbesondere also im Punkte Q, $\delta_\lambda(x, y) < 0$ gilt, während doch Q eine Nullstelle von $\delta_\lambda(x, y)$ ist.

Dieser Widerspruch beweist die Eindeutigkeit der obigen Aussage über die relative Lage des Gebietes G_λ zur Strecke AB.

13. Wir zeigen nun erstens: *wenn für einen gewissen Parameterwert ν das entsprechende Gebiet G_ν etwa rechts von der Strecke AB liegt, so trifft dasselbe für alle Parameterwerte λ zu, für welche $|\lambda - \nu|$ hinreichend klein ist.*

Die Annahme über ν bedeutet nämlich folgendes: man kann einen Streckenzug Σ_* angeben, der einen Punkt B_0 der Strecke OB mit einem Punkte A_0 der Strecke OA verbindet, so dass Σ_* einschliesslich Endpunkte im Gebiete G_ν verläuft, ohne die Strecke A_0B_0 sonst zu treffen; dabei stösst das durch Σ_* und die Strecke A_0B_0 begrenzte Polygongebiet von rechts an die Strecke AB. Unsere Behauptung wird erwiesen sein, sobald wir zeigen können, dass für solche λ-Werte, die wenig von ν abweichen, die entsprechende Funktion $\delta_\lambda(x, y)$ am Streckenzuge Σ_* negativ ist; da nämlich das Gebiet G_λ alle Punkte, wo $\delta_\lambda(x, y) < 0$ ist, enthält, so wird dann der Streckenzug Σ_* gewiss im Innern von G_λ verlaufen.

Da nun am Streckenzuge Σ_* die Funktion $\delta_\nu(x, y)$ nach Voraussetzung negativ ist, und da diese Funktion stetig ist, so kann man eine positive Zahl ε derart bestimmen, dass auf Σ_* die Ungleichung $\delta_\nu(x,y) < -\varepsilon$ besteht. Ist dann λ ein beliebiger Parameterwert, so ist nach XX, XXII:

$$\delta_\lambda(x,y) = \delta_\nu(x,y) - (\lambda - \nu)\, T(x,y).$$

Wenn also τ das Maximum von $|T(x,y)|$ auf Σ_* bedeutet, so ist auf Σ_*

$$\delta_\lambda(x,y) < -\varepsilon + |\lambda - \nu|\, \tau.$$

Sobald also die Ungleichung

$$|\lambda - \nu| < \frac{\varepsilon}{2\tau} \qquad \text{XXIII.}$$

erfüllt ist, ist auf Σ_* auch die Funktion $\delta_\lambda(x,y)$ negativ, womit unsere Behauptung erwiesen ist.

14. Wir wollen zweitens zeigen, dass *man durch geeignete Wahl von λ das Gebiet G_λ auf eine beliebige Seite der Strecke AB bringen kann.*

Sei Σ_* ein Streckenzug, der die Punkte A, B innerhalb der Randkurve C verbindet, ohne die Gerade AB sonst zu treffen; es möge dabei Σ_* in derjenigen durch die Gerade AB bestimmten Halbebene liegen, die in Bezug auf den Umlaufssinn $A \to B$ nach rechts liegt. Da $f(x,y)$ sowie auch die durch XVII. eingeführte Funktion $z_0(x,y)$ stetig sind, so kann man auf Σ_*, mit Rücksicht auf XIII. und XVIII, in der Nähe von B bzw. A einen Punkt B' bzw. A' so fixieren, dass auf den Teilbögen BB' bzw. AA' von Σ_* die Ungleichungen

$$z_0(x,y) > f(B) + \frac{\mu}{2}, \quad f(x,y) < f(B) + \frac{\mu}{4}, \qquad \text{XXIV.}$$

bzw.

$$z_0(x,y) > f(A) + \frac{\mu}{2}, \quad f(x,y) < f(A) + \frac{\mu}{4} \qquad \text{XXV.}$$

bestehen. Die durch XIX. erklärte Funktion $T(x,y)$ ist jetzt auf Σ_* stets $\geqq 0$; wenn also

$$\lambda > 0 \qquad \text{XXVI.}$$

ist, so ist auf den Bögen BB', AA' mit Rücksicht auf XX, XXII, XXIV—XXVI:

$$\delta_\lambda(x,y) < -\frac{\mu}{4} < 0.$$

Am Bogen $A'B'$ ist $T(x,y)$, einschliesslich Endpunkte, positiv, sie hat also auf diesem Bogen ein positives Minimum m. Die Funktionen $z_0(x, y), f(x, y)$ sind stetig, bleiben also auf diesem Bogen absolut kleiner als eine gewisse endliche Zahl M. Auf dem Bogen $A'B'$ gilt also, wegen XXVI,

$$\delta_\lambda(x, y) < 2M - \lambda m.$$

Wird also

$$\lambda > \frac{2M}{m} \tag{XXVII.}$$

gewählt, so wird am ganzen Streckenzuge Σ_*, einschliesslich Endpunkte, $\delta_\lambda(x, y)$ negativ ausfallen, das entsprechende Gebiet G_λ liegt dann also rechts von der Strecke AB. Genau so wird gezeigt: wenn λ negativ und $|\lambda|$ hinreichend gross ist, so liegt das Gebiet G_λ links von der Strecke AB.

15. Die verschiedenen Aussagen über die relative Lage des Gebietes G_λ zur Strecke AB, die wir in No 12—14 aus der zu widerlegenden Ungleichung IX. gefolgert haben, stehen nun miteinander im Widerspruche, was man etwa wie folgt erkennt.

Mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen wir die Menge aller endlichen λ-Werte und erklären zwei Teilmengen $\mathfrak{M}^+$ bzw. $\mathfrak{M}^-$ durch die folgende Vorschrift. Der Parameterwert λ soll $\mathfrak{M}^+$ oder $\mathfrak{M}^-$ angehören, je nachdem das Gebiet G_λ rechts oder links von der Strecke AB liegt. Nach No 12 gehört dann jeder λ-Wert *einer und nur einer* dieser beiden Mengen an. Nach No 13 sind $\mathfrak{M}^+$ und $\mathfrak{M}^-$ *offene* Mengen, nach No 14 ist *keine* dieser beiden Mengen *leer*. Ein derartiger Sachverhalt kann aber nicht bestehen. Denn $\mathfrak{M}$ ist eine offene zusammenhängende lineare Menge, also ist es nicht möglich, dieselbe in zwei offene, nicht leere, elementenfremde Teilmengen zu zerlegen.

Dieser Widerspruch zeigt die Unzulässigkeit der Annahme IX; es muss hiernach für irgend zwei Punkte A, B innerhalb der Randkurve C die Ungleichung

$$\frac{|f(B) - f(A)|}{\overline{AB}} \leq \varDelta$$

bestehen, womit der Hilfssatz über die Sattelfunktionen bewiesen ist.

§ 2.

Anwendung auf reguläre zweidimensionale Variationsprobleme.

16. Sei $\Phi(p, q)$ eine für alle Werte von p, q erklärte, etwa analytische Funktion ihrer Argumente, für die überdies identisch in p, q die Ungleichungen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq} - \Phi_{pq}^2 > 0, \quad \Phi_{pp} > 0 \qquad \text{XXVIII.}$$

erfüllt sind.

Ist dann $f(x, y)$ eine innerhalb und auf der Randkurve C stetige, einer LIPSCHITZschen Bedingung genügende Funktion, so existieren fast überall innerhalb C die partiellen Ableitungen f_x und f_y und sie sind beschränkte messbare Funktionen. Wir können hiernach das Integral

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy \qquad \text{XXIX.}$$

bilden. Wir beweisen dann zunächst den folgenden

Satz. *Wenn $f(x, y)$ keine Sattelfunktion ist, so kann man eine in und auf C stetige Funktion $f^*(x, y)$ mit folgenden Eigenschaften finden.*

a) Auf C gilt $f = f^*$.

b) f^* genügt einer LIPSCHITZ*schen Bedingung, und zwar ist ihre* LIPSCHITZ*konstante $L[f^*]$ nicht grösser als die* LIPSCHITZ*konstante $L[f]$ von f.*

c) Es besteht die Ungleichung

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy < \iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy.$$

Wenn $\Phi(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}$ und $f(x, y)$ hinreichend regulär ist, so drückt der Satz eine anschaulich evidente Tatsache über den Flächeninhalt krummer Flächen aus.

17. Wir nehmen also an, dass f *keine* Sattelfunktion ist. Dann gibt es also drei Konstanten a_0, b_0, c_0 und ein innerhalb C liegendes Gebiet G_0, so dass die Funktion

$$\delta_0(x, y) = f(x, y) - a_0 x - b_0 y - c_0$$

in allen Randpunkten von G_0 etwa nicht grösser als eine Konstante M ist, während es einen inneren Punkt (x_0, y_0) von G_0 gibt, wo $\delta_0(x_0, y_0) > M$ ist. Es ist also

$$\delta_0(x_0, y_0) = M + \varepsilon, \ \varepsilon > 0.$$

Wir bilden dann die Funktion

$$\delta(x, y) = \delta_0(x, y) - M - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Im Punkte (x_0, y_0) ist dann $\delta(x, y)$ positiv. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Punkte im Innern von G_0, wo $\delta(x, y) > 0$ ist. Dann ist also $\mathfrak{M}$ eine nicht leere offene Punktmenge; wir wollen zeigen, dass $\delta(x, y)$ in allen Randpunkten von $\mathfrak{M}$ verschwindet. Ist nämlich R ein solcher Randpunkt, so ist, da auf $\mathfrak{M}$ selbst $\delta(x, y) > 0$ ist, in diesem Punkte $\delta(x, y) \geqq 0$. Da in allen Randpunkten von G_0 die Ungleichung $\delta(x, y) \leqq M - M - \frac{\varepsilon}{2} < 0$ gilt, so sind also alle Randpunkte von $\mathfrak{M}$ innere Punkte des Gebietes G_0. Ist aber R innerer Punkt von G_0 und Randpunkt von $\mathfrak{M}$, so ist im Punkte R zunächst $\delta(x, y) \geqq 0$; es muss aber das Gleichheitszeichen gelten, da sonst R, gegen die Voraussetzung, innerer Punkt von $\mathfrak{M}$ wäre. Wenn wir noch $a = a_0$, $b = b_0$, $c = c_0 + M + \frac{\varepsilon}{2}$ setzen, so können wir also zusammenfassend sagen:

Da $f(x, y)$ keine Sattelfunktion ist, so gibt es drei Konstanten a, b, c und eine nicht leere offene Punktmenge $\mathfrak{M}$ innerhalb der Randkurve C, so dass die Funktion

$$\delta(x, y) = f(x, y) - ax - by - c \qquad \text{XXX.}$$

auf der Menge $\mathfrak{M}$ von Null verschieden, also etwa positiv ist und in allen Randpunkten von $\mathfrak{M}$ verschwindet.

Auf diese Tatsache wollen wir unsere weiteren Schlüsse gründen.

18. Mit $\mathfrak{M}'$ werde die Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ in Bezug auf den abgeschlossenen, durch die Randkurve C begrenzten Bereich bezeichnet; $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ sind dann beide messbare Punktmengen. Wir erklären nun eine Funktion $f^*(x, y)$ durch die Vorschrift:

$$\begin{aligned} f^* &= f \text{ auf der Menge } \mathfrak{M}', \\ f^* &= ax + by + c \text{ auf der Menge } \mathfrak{M}, \end{aligned} \qquad \text{XXXI.}$$

und behaupten, dass diese Funktion alle Forderungen des Satzes in No 16 erfüllt.

Für die Forderung *a)* ist dies evident, da die Punkte der Randkurve C in $\mathfrak{M}'$ enthalten sind; in $\mathfrak{M}$ können sie nämlich deswegen nicht enthalten sein, weil nach Definition alle Punkte von $\mathfrak{M}$ innerhalb C liegen. Wir wollen weiter *b)* verifizieren und zeigen zunächst, dass f^* in allen Punkten in und auf C *stetig* ist. Für solche Punkte, die innere oder äussere Punkte für die offene Punktmenge $\mathfrak{M}$ sind, ist dies auf Grund der Definitionsformeln XXXI. evident. Sei also (x_0, y_0) ein Randpunkt von $\mathfrak{M}$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\delta(x_0, y_0) = 0 = f(x_0, y_0) - ax_0 - by_0 - c,$$

also, mit Rücksicht auf XXXI,

$$f^*(x_0, y_0) = ax_0 + by_0 + c = f(x_0, y_0). \qquad \text{XXXII.}$$

Da sowohl $f(x, y)$ wie auch $ax + by + c$ stetig sind, so kann man eine Umgebung, oder falls (x_0, y_0) auf C liegt, eine Halbumgebung, von (x_0, y_0) abgrenzen, in welcher

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon, \ |ax + by + c - (ax_0 + by_0 + c)| < \varepsilon$$

gilt, oder mit Rücksicht auf XXXII.

$$|f(x, y) - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon, \ |ax + by + c - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

wobei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben ist. Da nun $f^*(x, y)$ entweder gleich $f(x, y)$ oder gleich $ax + by + c$ ist, so gilt für alle Punkte der betrachteten Umgebung

$$|f^*(x, y) - f^*(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

womit die Stetigkeit von f^* erwiesen ist.

Wir zeigen nun, dass für irgend zwei Punkte A, B innerhalb C die Ungleichung

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq L[f] \qquad \text{XXXIII.}$$

erfüllt ist, wo $L[f]$ die Lipschitzkonstante von f bedeutet, und unterscheiden dabei die folgenden Fälle:

α) A und B liegen beide in $\mathfrak{M}'$.

β) A und B liegen beide in $\mathfrak{M}$.

γ) A liegt in $\mathfrak{M}$, B liegt in $\mathfrak{M}'$ und ist Randpunkt von $\mathfrak{M}$.

δ) A liegt in $\mathfrak{M}$, B liegt in $\mathfrak{M}'$, ohne aber Randpunkt von $\mathfrak{M}$ zu sein.

Im Falle *α)* ist XXXIII. mit Rücksicht auf XXXI. evident. Wir betrachten den Fall *β)*. Man durchlaufe die Gerade AB, vom Punkte A aus, in der Richtung von A nach B; sei B' der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, auf welchen man dabei stösst. Man durchlaufe dann die Gerade AB, vom Punkte B aus, in der Richtung von B nach A; sei A' der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, den man dabei trifft. Da A', B' Punkte der Komplementärmenge $\mathfrak{M}'$ und gleichzeitig Randpunkte von $\mathfrak{M}$ sind, so gilt

$$\begin{aligned} f^*(B') &= ax_{B'} + by_{B'} + c = f(B'), \\ f^*(A') &= ax_{A'} + by_{A'} + c = f(A'); \end{aligned} \qquad \text{XXXIV.}$$

da ferner A, B Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, so gilt

$$f^*(A) = ax_A + by_A + c, \quad f^*(B) = ax_B + by_B + c;$$

dabei sind (x_A, y_A), $(x_{A'}, y_{A'})$, ... die Koordinaten der Punkte $A, A', \ldots$ Aus diesen Gleichungen folgt weiter

$$\begin{aligned} \frac{f^*(B) - f^*(A)}{\overline{AB}} &= a\,\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}} + b\,\frac{y_B - y_A}{\overline{AB}}, \\ \frac{f^*(B') - f^*(A')}{\overline{A'B'}} &= a\,\frac{x_{B'} - x_{A'}}{\overline{A'B'}} + b\,\frac{y_{B'} - y_{A'}}{\overline{A'B'}}. \end{aligned} \qquad \text{XXXV.}$$

Da aber die vier Punkte A', A, B, B' in eben dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen, so ist

$$\frac{x_B - x_A}{\overline{AB}} = \frac{x_{B'} - x_{A'}}{\overline{A'B'}}, \quad \frac{y_B - y_A}{\overline{AB}} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{\overline{A'B'}},$$

also folgt aus XXXV, XXXIV,

$$\frac{f^*(B) - f^*(A)}{\overline{AB}} = \frac{f^*(B') - f^*(A')}{\overline{A'B'}} = \frac{f(B') - f(A')}{\overline{A'B'}},$$

folglich

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} = \frac{|f(B') - f(A')|}{\overline{A'B'}} \leqq L\,[f],$$

womit der Fall β) erledigt ist. Um γ) auf β) zurückzuführen, sei B_n eine Punktfolge in $\mathfrak{M}$, die gegen den Randpunkt B konvergiert. Dann gilt nach β) für jeden Wert von n:

$$\frac{|f^*(B_n) - f^*(A)|}{\overline{AB_n}} \leqq L\,[f],$$

woraus, mit Rücksicht auf die bereits festgestellte Stetigkeit von f^*, durch Grenzübergang

$$\frac{|f^*(B) - f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq L\,[f]$$

folgt. Um schliesslich δ) auf α) und γ) zurückzuführen sei R der erste Randpunkt von $\mathfrak{M}$, den man beim Durchlaufen der Strecke

AB in der Richtung von A nach B trifft. Dann gilt nach α) bzw. γ):

$$\frac{|f^*(B)-f^*(R)|}{\overline{BR}} \leqq L[f], \quad \frac{|f^*(A)-f^*(R)|}{\overline{AR}} \leqq L[f],$$

also

$$\frac{|f^*(B)-f^*(A)|}{\overline{AB}} \leqq$$

$$\leqq \frac{|f^*(B)-f^*(R)|+|f^*(A)-f^*(R)|}{\overline{AB}} \leqq L[f]\,\frac{\overline{BR}+\overline{AR}}{\overline{AB}} = L[f].$$

Damit ist der Nachweis geliefert, dass f^* der Forderung *b)* des Satzes in No 16 genügt.

19. Wir wenden uns nun der Forderung *c)* dieses Satzes zu und zeigen zunächst: es gelten die Gleichungen

$$f^*_x = f_x,\ f^*_y = f_y \text{ fast überall auf } \mathfrak{M}'.\text{[8]} \qquad \text{XXXVI.}$$

Zu dem Ende bemerken wir, dass die Funktionen f und f^*, da sie einer LIPSCHITZbedingung genügen, nach einem wichtigen Satze von Herrn RADEMACHER innerhalb der Randkurve C fast überall *total differenzierbar* sind.[9]) Wir lassen erstens alle solche Punkte von $\mathfrak{M}'$ fort, wo dies nicht der Fall ist. Weiter bemerken wir, dass die messbare Punktmenge $\mathfrak{M}'$ in fast allen ihrer Punkte die *Dichte* 1 hat; wir lassen zweitens alle die Punkte von $\mathfrak{M}'$ fort, wo dies nicht der Fall ist. Dann haben wir also eine Nullmenge fortgelassen; man kann nun leicht zeigen, dass in allen übrigen Punkten von $\mathfrak{M}'$ die Beziehungen XXXVI. gelten.

Sei (x_0, y_0) ein solcher Punkt. Infolge der totalen Differenzierbarkeit gelten dann Darstellungen der Form

$$\left.\begin{aligned} f(x,y) &= \\ = f(x_0,y_0) &+ f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+ [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\, S(x,y), \\ f^*(x,y) &= \\ = f^*(x_0,y_0) &+ f^*_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f^*_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ &+ [(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2}\, S^*(x,y), \end{aligned}\right\} \qquad \text{XXXVII.}$$

---

[8]) Wenn f und f^* hinreichend regulär wären, so würde die Richtigkeit dieser Behauptung unmittelbar aus der geometrischen Anschauung folgen. Denn diejenigen gemeinsamen Punkte zweier Flächen, wo die beiden Flächen einander nicht berühren, bilden Kurvenzüge, also bilden die Projektionen dieser Punkte eine zweidimensionale Nullmenge.

[9]) H. RADEMACHER, Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln (*Math. Annalen* Bd. 79, 1919, S. 340—359).

wo für $x \to x_0, y \to y_0$ sowohl $S(x,y)$ wie auch $S^*(x,y)$ gegen Null streben. Wir führen durch

$$x = x_0 + \varrho \cos\theta,\ y = y_0 + \varrho \sin\theta$$

Polarkoordinaten ein, und betrachten einen festen Wert θ'. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig klein. Da $\mathfrak{M}'$ im Punkte (x_0, y_0) die Dichte 1 hat, so gibt es im Winkelraume

$$\theta' - \varepsilon \leqq \theta \leqq \theta' + \varepsilon$$

gewiss eine gegen (x_0, y_0) konvergierende Punktfolge (x_n, y_n), deren Punkte in $\mathfrak{M}'$ enthalten sind. Sei

$$x_n = x_0 + \varrho_n \cos\theta_n,\ y_n = y_0 + \varrho_n \sin\theta_n.$$

Dann gilt $\varrho_n \to 0$; wir können auch durch Übergang zu einer geeigneten Teilfolge erreichen, dass die Folge θ_n konvergiert; sei $\lim \theta_n = \theta_\epsilon$. Dann gilt auch

$$\theta' - \varepsilon \leqq \theta_\epsilon \leqq \theta' + \varepsilon.$$

Da auf $\mathfrak{M}'$ die Gleichung $f = f^*$ gilt, so erhalten wir aus XXXVII. durch Subtraktion und Division durch ϱ_n:

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)] \cos\theta_n + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)] \sin\theta_n + \\ + S(x_n, y_n) - S^*(x_n, y_n) = 0,$$

und daraus, da für $n \to \infty$ sowohl $S(x_n, y_n)$ wie auch $S^*(x_n, y_n)$ gegen Null gehen,

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)] \cos\theta_\epsilon + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)] \sin\theta_\epsilon = 0.$$

Lassen wir nun ε gegen Null gehen, so konvergiert θ_ϵ gegen θ'; es folgt also weiter

$$[f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0)] \cos\theta' + [f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0)] \sin\theta' = 0.$$

Da hier θ' beliebig ist, so folgt daraus

$$f_x(x_0, y_0) - f_x^*(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) - f_y^*(x_0, y_0) = 0,$$

was wir zeigen wollten.

20. Aus XXXVI. folgt zunächst

$$\iint_{\mathfrak{M}'} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy = \iint_{\mathfrak{M}'} \Phi(f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy. \qquad \text{XXXVIII.}$$

Da $f - f^*$ auf der Randkurve C verschwindet, so folgt ferner durch erlaubte partielle Integration

$$\iint\limits_{(C)} (f_x - f_x^*)\, dx\, dy = \int\limits_C (f - f^*)\, dy = 0,$$
$$\iint\limits_{(C)} (f_y - f_y^*)\, dx\, dy = -\int\limits_C (f - f^*)\, dx = 0. \qquad \text{XXXIX.}$$

Aus XXXVI, XXXIX. ergibt sich weiter

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} (f_x - f_x^*)\, dx\, dy = \iint\limits_{(C)} - \iint\limits_{\mathfrak{M}'} = 0, \qquad \text{XL.}$$

und ebenso

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} (f_y - f_y^*)\, dx\, dy = 0. \qquad \text{XLI.}$$

Wir zeigen jetzt, dass

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} \Phi(f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy < \iint\limits_{\mathfrak{M}} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy. \qquad \text{XLII.}$$

Nach der Taylorschen Formel gilt für beliebige Werte von p, q, p^*, q^* die Entwicklung

$$\Phi(p, q) = \Phi(p^*, q^*) + \Phi_p(p^*, q^*)(p - p^*) + \Phi_q(p^*, q^*)(q - q^*) + \\ + \frac{1}{2} R(p, q, p^*, q^*), \qquad \text{XLIII.}$$

wo R analytisch in Bezug auf ihre Argumente ist; ausserdem gilt eine Darstellung

$$R = \Phi_{pp}(\bar{p}, \bar{q})(p - p^*)^2 + 2\Phi_{pq}(\bar{p}, \bar{q})(p - p^*)(q - q^*) + \\ + \Phi_{qq}(\bar{p}, \bar{q})(q - q^*)^2, \qquad \text{XLIV.}$$

wo $\bar{p}$ bzw. $\bar{q}$ gewisse Zwischenwerte zwischen p und p^* bzw. q und q^* sind. Wir setzen in XLIII.

$$p = f_x,\ q = f_y,\ p^* = f_x^*,\ q^* = f_y^*,$$

und integrieren auf der Menge $\mathfrak{M}$. Wegen XXXI. sind f_x^* und f_y^* auf $\mathfrak{M}$ konstant; wir erhalten also mit Rücksicht auf XL, XLI,

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy =$$
$$= \iint\limits_{\mathfrak{M}} \Phi(f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy + \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathfrak{M}} R(f_x, f_y, f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy,$$

und XLII. wird also erwiesen sein, sobald wir zeigen können, dass

$$\iint\limits_{\mathfrak{M}} R(f_x, f_y, f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy > 0 \qquad \text{XLV.}$$

ist. An dieser Stelle greifen nun die über Φ getroffenen Annahmen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq}-\Phi_{pq}^2>0,\ \Phi_{pp}>0$$

ein. Aus denselben folgt zunächst, mit Rücksicht auf XLIV, dass stets $R\geqq 0$ ist. Die linke Seite von XLV. ist also gewiss $\geqq 0$, und könnte nur dann gleich Null sein, wenn auf $\mathfrak{M}$ fast überall die Gleichung

$$R(f_x, f_y, f_x^*, f_y^*)=0$$

bestehen würde. Daraus würde, nach XXVIII. und XLIV. folgen, dass in $\mathfrak{M}$ fast überall die Beziehungen

$$f_x=f_x^*,\ f_y=f_y^*$$

gelten, dass also im $\mathfrak{M}$ die Differenz $f-f^*$ konstant ist. Nun ist aber in $\mathfrak{M}$, nach XXXI, XXX.:

$$f(x,y)-f^*(x,y)=\delta(x,y).$$

Es wäre also $\delta(x,y)$ im $\mathfrak{M}$ konstant, was aber dem Umstande widerspricht, dass $\delta(x,y)$ innerhalb $\mathfrak{M}$ von Null verschieden ist und am ganzen Rande von $\mathfrak{M}$ verschwindet. Damit ist XLV, mithin auch XLII. erwiesen.

Nun haben wir

$$\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy=\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy+\iint\limits_{\mathfrak{M}'}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy,$$

also nach XXXVIII, XLII.:

$$\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x^*, f_y^*)\,dx\,dy<\iint\limits_{\mathfrak{M}}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy+\iint\limits_{\mathfrak{M}'}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy=$$

$$=\iint\limits_{(C)}\Phi(f_x, f_y)\,dx\,dy,$$

und damit ist gezeigt, dass die Funktion f^* auch der letzten Forderung *c)* das Satzes in No 16 genügt; dieser Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

21. Hauptsatz. *Auf der Randkurve C sei eine Randwertfolge vorgeschrieben, welche einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten Δ genügt.*

Sei $\Phi(p,q)$ eine für alle reelle Werte von p, q erklärte, etwa analytische Funktion, welche überall die Ungleichungen

$$\Phi_{pp}\,\Phi_{qq}-\Phi_{pq}^2>0,\ \Phi_{pp}>0$$

erfüllt; das Variationsproblem

$$\iint \Phi(p, q)\, dx\, dy = \text{minimum}$$

sei also regulär.

Sei schliesslich $f(x, y)$ eine in und auf C stetige Funktion, welche unter allen Funktionen, die auf C die vorgeschriebenen Randwerte annehmen und innerhalb C einer Lipschitz*bedingung genügen, dem über das Innere von C erstreckten Integrale*

$$\iint \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy$$

einen möglichst kleinen Wert erteilt.

Dann gilt für diese Extremalfunktion, wenn (x_2, y_2), (x_1, y_1) irgend zwei Punkte innerhalb C sind, die Ungleichung

$$\frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}} \leqq \Delta.$$

Mit anderen Worten: für die Lipschitz*konstante der Extremalfunktion gibt es eine Schranke, die nur von den vorgeschriebenen Randwerten abhängt, also a priori angegeben werden kann, sobald diese Randwerte bekannt sind.*

Zusatz. *Der Satz bleibt bestehen, wenn die Extremaleigenschaft von $f(x, y)$ nur in Bezug auf solche Konkurrenzfunktionen vorausgesetzt wird, deren* Lipschitz*konstanten eine willkürlich vorgegebene positive Zahl L nicht übertreffen.*[10])

Es genügt den Zusatz zu beweisen, da der Hauptsatz offenbar in demselben enthalten ist. Man bemerkt zunächst, dass mit Rücksicht auf den Satz von No 16 die Extremalfunktion eine Sattelfunktion sein muss. Sonst könnte man nach dem erwähnten Satze eine Funktion $f^*(x, y)$ finden, welche auf der Randkurve C die vorgeschriebenen Werte annimmt, die wegen ihrer im erwähnten Satze mit *b)* bezeichneten Eigenschaft eine Lipschitzkonstante $L[f^*]$ besitzt, welche nicht grösser als $L[f]$, also a fortiori nicht grösser als L ist; diese Eigenschaften haben zur Folge, dass $f^*(x, y)$ in derjenigen Konkurrenz enthalten ist, in Bezug auf welche die Extremaleigenschaft von $f(x, y)$ postuliert wurde. Die in No 16 mit *c)* bezeichnete Eigenschaft von $f^*(x, y)$, dass nämlich

[10]) Es wird natürlich vorausgesetzt, dass $f(x, y)$ selbst in dieser Konkurrenz enthalten ist, dass also $L[f] \leqq L$ gilt.

$$\iint\limits_{(C)} \Phi(f_x^*, f_y^*)\, dx\, dy < \iint\limits_{(C)} \Phi(f_x, f_y)\, dx\, dy$$

ist, stellt also einen Widerspruch dar; es muss also die Extremalfunktion $f(x, y)$ eine Sattelfunktion sein. Dann aber ist, da die Randwerte von f nach Voraussetzung einer Dreipunktebedingung mit der Konstanten $\varDelta$ genügen, die behauptete Ungleichung $L[f] \leqq \varDelta$ eine unmittelbare Folge des in § 1 bewiesenen Satzes über Sattelfunktionen.

Szeged, den 25. Februar 1926.